4T ESO · UNITAT 1 · SOLUCIONARI

Potències i radicals

La fitxa «Per practicar» resolta: 13 exercicis i 56 apartats, amb el procediment per entendre cada resultat.

INS Pere Borrell · Rubén Pineda · Curs 2026-2027

Com treballar la fitxa

Objectius: convertir potències i arrels, simplificar radicals, operar-hi i racionalitzar denominadors.

Proposta de treball: tres blocs de 20 minuts: exercicis 1–6, 7–10 i 11–13. Intenta resoldre cada apartat abans de desplegar-ne la solució.

En els càlculs amb lletres suposem variables positives. Si s'admeten valors negatius o zero, cal comprovar el domini i els valors absoluts; trobaràs les precisions al final.

1. Potències amb exponent fraccionari

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ per a bases positives.

a) $\sqrt{5}$

Resolució:

$$5^{1/2}$$

b) $\sqrt[3]{x^2}$

Resolució:

$$x^{2/3}$$

c) $\sqrt{a^3}$

Resolució:

$$a^{3/2}$$

d) $\sqrt[5]{a^3}$

Resolució:

$$a^{3/5}$$

2. De potència a radical

El denominador de l'exponent és l'índex de l'arrel; el numerador és l'exponent del radicand.

a) $3^{1/2}$

Resolució:

$$\sqrt{3}$$

b) $5^{3/2}$

Resolució:

$$\sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$$

c) $x^{1/5}$

Resolució:

$$\sqrt[5]{x}$$

d) $x^{5/3}$

Resolució:

$$\sqrt[3]{x^5} = x\sqrt[3]{x^2}$$

3. Simplificació de radicals

Descomponem les bases en factors primers i dividim l'índex i tots els exponents pel seu màxim comú divisor.

a) $\sqrt[4]{25}$

Resolució:

$$\sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$$

b) $\sqrt[8]{8^2}$

Resolució:

$$\sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

c) $\sqrt[14]{x^6}$

Resolució:

$$\sqrt[7]{x^3}$$

d) $\sqrt[30]{16x^8}$

Resolució:

$$\sqrt[30]{2^4x^8} = \sqrt[15]{4x^4}$$

4. Extracció de factors

Separem potències completes de l'índex. En arrels parelles, l'extracció d'una potència requereix valor absolut si la base pot ser negativa.

a) $\sqrt{18}$

Resolució:

$$\sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

b) $\sqrt[3]{16}$

Resolució:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

c) $\sqrt{9a^3}$

Resolució:

$$\sqrt{(3a)^2 a} = 3a\sqrt{a}$$

d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

Resolució:

$$\sqrt{(7ab^2c^3)^2\, 2abc} = 7ab^2c^3\sqrt{2abc}$$

5. Introducció de factors

Per introduir un factor dins d'una arrel, l'elevem a l'índex d'aquella arrel.

a) $3\sqrt{5}$

Resolució:

$$\sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

b) $2\sqrt{a}$

Resolució:

$$\sqrt{2^2 a} = \sqrt{4a}$$

c) $3a\sqrt{2a^2}$

Resolució:

$$\sqrt{(3a)^2\,2a^2} = \sqrt{18a^4}$$

d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

Resolució:

$$\sqrt[3]{(ab^2)^3 a^2 b} = \sqrt[3]{a^5b^7}$$

6. Índex mínim comú

Calculem el mínim comú múltiple dels índexs. Multipliquem cada exponent pel mateix factor que l'índex.

a) $\sqrt{5};\ \sqrt[4]{3}$

Resolució:

$$\text{mcm}(2,4) = 4: \quad \sqrt[4]{25};\ \sqrt[4]{3}$$

b) $\sqrt[3]{4};\ \sqrt[4]{3};\ \sqrt{2}$

Resolució:

$$\text{mcm}(3,4,2) = 12: \quad \sqrt[12]{256};\ \sqrt[12]{27};\ \sqrt[12]{64}$$

c) $\sqrt[4]{3};\ \sqrt[8]{7};\ \sqrt{2}$

Resolució:

$$\text{mcm}(4,8,2) = 8: \quad \sqrt[8]{9};\ \sqrt[8]{7};\ \sqrt[8]{16}$$

d) $\sqrt{3};\ \sqrt[6]{32};\ \sqrt[3]{5}$

Resolució:

$$\text{mcm}(2,6,3) = 6: \quad \sqrt[6]{27};\ \sqrt[6]{32};\ \sqrt[6]{25}$$

7. Sumes i restes de radicals

Primer descomponent en factors i extraient els que sigui possible, obtenim radicals semblants i en sumem o restem els coeficients.

a) $\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20}$

Descomponem els radicands i extraiem factors:

$$\sqrt{3^2\cdot 5} - \sqrt{5^2\cdot 5} - \sqrt{2^2\cdot 5} = 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (3-5-2)\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$

Descomponem en factors:

$$\sqrt{5^2\cdot 3}-\sqrt{7^2\cdot 3}+\sqrt{15^2\cdot 3}-\sqrt{2^2\cdot 3}=5\sqrt{3}-7\sqrt{3}+15\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(5-7+15-2)\sqrt{3}=11\sqrt{3}$$

c) $\sqrt{175}+\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

Descomponem en factors:

$$\sqrt{5^2\cdot 7}+\sqrt{3^2\cdot 7}-2\sqrt{2^2\cdot 7}=5\sqrt{7}+3\sqrt{7}-2\cdot 2\sqrt{7}=(5+3-4)\sqrt{7}=4\sqrt{7}$$

d) $\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

Descomponem en factors:

$$\sqrt{2^2\cdot 5}+\frac{1}{3}\sqrt{3^2\cdot 5}+2\sqrt{5^2\cdot 5}=2\sqrt{5}+\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{5}+2\cdot 5\sqrt{5}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}+10\sqrt{5}=13\sqrt{5}$$

8. Productes de radicals

Amb el mateix índex multipliquem directament els radicands. Amb índexs diferents, primer reduïm al mínim comú múltiple dels índexs.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

Multipliquem els radicands i simplifiquem:

$$\sqrt{3\cdot 6}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$$

b) $5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}$

Multipliquem coeficients entre si i radicands entre si:

$$(5\cdot 3)\sqrt{2\cdot 5}=15\sqrt{10}$$

c) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9}$

Agrupem sota la mateixa arrel cúbica:

$$\sqrt[3]{12\cdot 9}=\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{3^3\cdot 4}=3\sqrt[3]{4}$$

d) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}$

Índex comú $\text{mcm}(2,3)=6$:

$$\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{(2x^2)^2}=\sqrt[6]{x^3\cdot 4x^4}=\sqrt[6]{4x^7}=\sqrt[6]{x^6\cdot 4x}=x\sqrt[6]{4x}$$

e) $\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[4]{8a^3}$

Índex comú $\text{mcm}(2,4)=4$:

$$\sqrt[4]{(2ab)^2}\cdot\sqrt[4]{8a^3}=\sqrt[4]{4a^2b^2\cdot 8a^3}=\sqrt[4]{32a^5b^2}=\sqrt[4]{2^5a^5b^2}=2a\sqrt[4]{2ab^2}$$

f) $\sqrt[4]{2x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{5x^2}$

Índex comú $\text{mcm}(4,6)=12$:

$$\sqrt[12]{(2x^2y^3)^3\cdot(5x^2)^2}=\sqrt[12]{8x^6y^9\cdot 25x^4}=\sqrt[12]{200x^{10}y^9}$$

9. Productes amb sumes i restes

Apliquem la propietat distributiva i les identitats notables.

a) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}$

Distribuïm $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2-\sqrt{6}=2-\sqrt{6}$$

b) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$

Distribuïm $2\sqrt{3}$:

$$7\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}+5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=14\sqrt{15}+10(\sqrt{3})^2=14\sqrt{15}+10\cdot 3=14\sqrt{15}+30$$

c) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot 4\sqrt{2}$

Distribuïm $4\sqrt{2}$:

$$2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}+\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{2}-5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-20\cdot 2=8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-40$$

d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

Apliquem la diferència de quadrats $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2$$

10. Quocients de radicals

Dividim radicands quan tenen el mateix índex o reduïm primer a índex comú.

a) $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$

Agrupem en una sola arrel i simplifiquem:

$$\sqrt{\frac{6x}{3x}}=\sqrt{2}$$

b) $\frac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

Agrupem el quocient sota l'arrel quadrada:

$$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{75x^2y^3}{3xy}} = \frac{1}{5}\sqrt{25xy^2} = \frac{1}{5}\cdot 5y\sqrt{x} = y\sqrt{x}$$

c) $\frac{\sqrt{9x}}{\sqrt[3]{3x}}$

Índex comú $\text{mcm}(2,3) = 6$:

$$\sqrt[6]{\frac{(9x)^3}{(3x)^2}} = \sqrt[6]{\frac{(3^2x)^3}{3^2x^2}} = \sqrt[6]{\frac{3^6x^3}{3^2x^2}} = \sqrt[6]{3^4x} = \sqrt[6]{81x}$$

d) $\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$

Extraiem factors i simplifiquem:

$$\frac{\sqrt[3]{2^3a^3b}}{\sqrt[4]{(2a)^2}} = \frac{2a\sqrt[3]{b}}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{2a}\sqrt{2a}\sqrt[3]{b}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{(2a)^3b^2} = \sqrt[6]{8a^3b^2}$$

e) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[9]{3}}$

Operem amb exponents fraccionaris:

$$\frac{3^{2/3}}{3^{1/9}} = 3^{2/3-1/9} = 3^{6/9-1/9} = 3^{5/9} = \sqrt[9]{3^5} = \sqrt[9]{243}$$

f) $\frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[8]{x^3}}$

Operem amb exponents fraccionaris:

$$\frac{x^{5/6}}{x^{3/8}} = x^{5/6-3/8} = x^{20/24-9/24} = x^{11/24} = \sqrt[24]{x^{11}}$$

11. Arrels imbricades

Per resoldre arrels imbricades podem introduir els factors interiors dins de cada arrel consecutivament, o bé expressar cada arrel com a potència d'exponent fraccionari.

a) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$

Procediment pas a pas:

1. Introduïm el factor 2 dins de l'arrel quarta: $2 = \sqrt[4]{2^4}$, per tant $2\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^4\cdot 2} = \sqrt[4]{2^5}$.
2. Multipliquem els índexs de les arrels imbricades: $\sqrt[5]{\sqrt[4]{2^5}} = \sqrt[5\cdot 4]{2^5} = \sqrt[20]{2^5}$.
3. Simplifiquem dividint índex i exponent pel seu $\text{mcd}(20,5) = 5$:

$$\sqrt[20]{2^5} = \sqrt[4]{2^1} = \sqrt[4]{2}$$

Alternativa amb exponents: $(2\cdot 2^{1/4})^{1/5} = (2^{5/4})^{1/5} = 2^{5/20} = 2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$.

b) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$

Procediment pas a pas:

1. Introduïm x^2 a l'arrel quarta: $(x^2)^4 \cdot x^3 = x^8 \cdot x^3 = x^{11}$.
2. Multipliquem índexs: $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^{11}}} = \sqrt[20]{x^{11}}$.

Alternativa amb exponents: $(x^2 \cdot x^{3/4})^{1/5} = (x^{11/4})^{1/5} = x^{11/20} = \sqrt[20]{x^{11}}$.

c) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$

Procediment pas a pas:

1. Treballem de dins cap a fora: $x^2\sqrt{x} = \sqrt{(x^2)^2 x} = \sqrt{x^5}$.
2. Arrel cúbica de l'arrel quadrada: $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[6]{x^5}$.
3. Introduïm x^3 a l'arrel sisena: $(x^3)^6 \cdot x^5 = x^{18} \cdot x^5 = x^{23}$.
4. Arrel quarta exterior: $\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^{23}}} = \sqrt[24]{x^{23}}$.

Alternativa amb exponents: $\left(x^3(x^2x^{1/2})^{1/3}\right)^{1/4} = \left(x^3(x^{5/2})^{1/3}\right)^{1/4} = (x^3x^{5/6})^{1/4} = (x^{23/6})^{1/4} = x^{23/24} = \sqrt[24]{x^{23}}$.

d) $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

Procediment pas a pas:

1. De dins cap a fora: $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^3}$.
2. Arrel cúbica de l'arrel quadrada: $\sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.
3. Multipliquem pel 2 exterior: $2\sqrt{2} = \sqrt{2^3}$.
4. Arrel sisena exterior: $\sqrt[6]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2}$.

Alternativa amb exponents: $\left(2(2 \cdot 2^{1/2})^{1/3}\right)^{1/6} = \left(2(2^{3/2})^{1/3}\right)^{1/6} = (2 \cdot 2^{1/2})^{1/6} = (2^{3/2})^{1/6} = 2^{3/12} = 2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$.

12. Racionalització amb un radical

Quan al denominador hi ha un únic radical, multipliquem el numerador i el denominador pel radical que completa una potència exacta de l'índex, de manera que l'arrel s'elimini.

a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

Procediment: Multipliquem numerador i denominador per $\sqrt{7}$:

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Procediment: Multipliquem numerador i denominador per $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$

Procediment: Multipliquem numerador i denominador per $\sqrt{2ax}$:

$$\frac{2a}{\sqrt{2ax}} = \frac{2a \cdot \sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax} \cdot \sqrt{2ax}} = \frac{2a\sqrt{2ax}}{2ax}$$

Simplifiquem dividint numerador i denominador pel factor comú $2a$:

$$\frac{2a\sqrt{2ax}}{2ax} = \frac{\sqrt{2ax}}{x}$$

d) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

Procediment: Com que l'arrel té índex 5 i tenim x^3, ens manquen $5-3=2$ factors per completar x^5. Multipliquem per $\sqrt[5]{x^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^2}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3 \cdot x^2}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}$$

13. Racionalització amb conjugats

Quan el denominador és un binomi amb arrels quadrades $(a \pm b)$, multipliquem el numerador i el denominador pel seu **conjugat**. Gràcies a la identitat notable *suma per diferència*, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, eliminem tots els radicals del denominador.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

Procediment detallat pas a pas:

1. **Identifiquem el conjugat del denominador:** el denominador és $\sqrt{3}-1$, el seu conjugat és $\sqrt{3}+1$ (canviem el signe del segon terme).
2. **Multipliquem numerador i denominador pel conjugat:**

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

3. **Desenvolupem el denominador amb la identitat notable** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$**:**

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

4. **Mantenim el numerador factoritzat per poder simplificar:**

$$2(\sqrt{3}+1)$$

5. **Simplifiquem la fracció dividint numerador i denominador entre** 2**:**

$$\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$$

b) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

Procediment detallat pas a pas:

1. **Identifiquem el conjugat del denominador:** el denominador és $3-\sqrt{5}$, el seu conjugat és $3+\sqrt{5}$.
2. **Multipliquem numerador i denominador pel conjugat:**

$$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

3. **Desenvolupem el denominador (diferència de quadrats):**

$$(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9-5 = 4$$

4. **Desenvolupem el numerador amb el quadrat d'un binomi** $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$**:**

$$(3+\sqrt{5})^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9+6\sqrt{5}+5 = 14+6\sqrt{5}$$

5. **Construïm la fracció i simplifiquem traient factor comú** 2**:**

$$\frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{2(7+3\sqrt{5})}{2\cdot 2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

c) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}$

Procediment detallat pas a pas:

1. **Identifiquem el conjugat del denominador:** el denominador és $4-\sqrt{11}$, el seu conjugat és $4+\sqrt{11}$.
2. **Multipliquem numerador i denominador:**

$$\frac{5}{4-\sqrt{11}} = \frac{5\cdot(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}$$

3. **Desenvolupem el denominador** $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$**:**

$$(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11}) = 4^2 - (\sqrt{11})^2 = 16-11 = 5$$

4. **Simplifiquem el factor** 5 **que multiplica dalt i baix:**

$$\frac{5(4+\sqrt{11})}{5} = 4+\sqrt{11}$$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

Procediment detallat pas a pas:

1. **Identifiquem el conjugat del denominador:** el denominador és $\sqrt{2}+1$, el seu conjugat és $\sqrt{2}-1$.
2. **Multipliquem numerador i denominador:**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

3. **Desenvolupem el denominador** $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$**:**

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2-1 = 1$$

4. **Desenvolupem el numerador aplicant la propietat distributiva:**

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot 1 = 2-\sqrt{2}$$

5. **Dividim pel denominador** 1**:**

$$\frac{2-\sqrt{2}}{1} = 2-\sqrt{2}$$

Domini i signes de les variables

Les arrels d'índex parell exigeixen un radicand no negatiu i els denominadors no poden ser zero. La regla general és $\sqrt{u^2}=|u|$.

- **1b:** per a qualsevol x real, $\sqrt[3]{x^2}=|x|^{2/3}$. La forma $x^{2/3}$ també s'utilitza si es defineix mitjançant l'arrel cúbica real.
- **3c:** sense suposar $x>0$, $\sqrt[14]{x^6}=\sqrt[7]{|x|^3}$. A **3d**, $\sqrt[15]{4x^4}$ ja és correcte per a qualsevol x real.
- **4d:** si $abc\neq 0$ i $abc>0$, l'extracció general és $7|a|b^2|c|^3\sqrt{2abc}$. Si alguna variable és zero, el radical original val zero.
- **5c:** si $a<0$, el factor exterior és negatiu: $3a\sqrt{2a^2}=-\sqrt{18a^4}$.
- **10b:** al domini complet del quocient, x i y han de ser positius; això justifica $y\sqrt{x}$.
- **10d:** per a $a\neq 0$ i b real, la forma general és $\operatorname{sgn}(a)\sqrt{2|a|}\,\sqrt[3]{b}$. La forma amb arrel sisena del solucionari pressuposa $a,b>0$.
- **12c:** la condició exacta és $ax>0$. El resultat $\sqrt{2ax}/x$ també és vàlid quan a i x són tots dos negatius.
- **12d:** $x\neq 0$; la forma $\sqrt[5]{x^2}/x$ funciona també per a $x<0$.