Arrels quadrades: teoria i pràctica

Guia de teoria i pràctica · Nivell de l'examen de 4t d'ESO

> **Objectius.** Simplificar arrels, operar amb radicals, racionalitzar i resoldre arrels imbricades.
> **Com treballar:** dedica uns 15 minuts a cadascuna de les quatre parts. Resol les activitats en un full i consulta les solucions només al final.

1. Què significa una arrel quadrada?

L'arrel quadrada principal és el nombre no negatiu que, elevat al quadrat, dona el radicand.

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{perquè} \quad 7^2 = 49$$

Cal distingir una arrel d'una equació: $\sqrt{49} = 7$, però l'equació $x^2 = 49$ té les solucions $x = 7$ i $x = -7$. Una arrel quadrada d'un nombre negatiu no té valor real.

2. Extracció de factors

Descompon el radicand, separa els quadrats perfectes i extreu-los. Amb $A \geq 0$ i $B \geq 0$:

$$\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$$

Exemple numèric. Separem el quadrat més gran que divideix el radicand:

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

Exemple amb lletres. En aquesta guia totes les variables són positives.

$$\sqrt{32a^3b^5} = \sqrt{16a^2b^4 \cdot 2ab} = 4ab^2\sqrt{2ab}$$

Sense la hipòtesi de positivitat, cal recordar que $\sqrt{u^2} = |u|$.

3. Introducció i exponent fraccionari

Per introduir un factor no negatiu dins d'una arrel, l'elevem al quadrat:

$$3a\sqrt{2a} = \sqrt{(3a)^2 \cdot 2a} = \sqrt{18a^3}$$

També podem escriure $\sqrt{a^m} = a^{m/2}$ si $a > 0$.

Practica sense mirar les solucions.

A1. Simplifica $\sqrt{192}$.

A2. Simplifica $\sqrt{27a^5b^3}$, amb variables positives.

Operacions amb radicals

4. Sumar i restar radicals

Només podem agrupar radicals semblants: han de tenir el mateix índex i el mateix radicand. Primer simplifica cada arrel; després opera amb els coeficients.

$$\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{8}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

> **Error freqüent:** $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ en general. Per exemple, $\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$, mentre que $\sqrt{25}=5$.

5. Multiplicar i distribuir

Multiplica els coeficients entre si i els radicands entre si; al final extreu factors. Per a radicands no negatius, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

$$2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{6}=10\sqrt{18}=30\sqrt{2}$$

Si hi ha un parèntesi, multiplica cada terme i conserva els signes:

$$(2\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{15}=2\sqrt{75}-\sqrt{45}=10\sqrt{3}-3\sqrt{5}$$

Amb conjugats, aplica la diferència de quadrats:

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=7-2=5$$

6. Dividir radicals

Podem agrupar el quocient si el radicand del numerador és no negatiu i el del denominador és positiu: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

$$\frac{\sqrt{32x^3y}}{4\sqrt{2xy}}=\frac{1}{4}\sqrt{16x^2}=x\qquad(x,y>0)$$

Practica.

A3. Simplifica $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$.

A4. Desenvolupa i simplifica $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{3}$.

A5. Simplifica $\dfrac{\sqrt{98x^3y}}{7\sqrt{2xy}}$, amb variables positives.

Entendre la distributiva

La distributiva: multipliquem tots els termes

Un factor situat fora d'un parèntesi ha de multiplicar **cadascun dels termes** de dins. El signe de cada terme també forma part del producte.

$$k(a+b) = ka + kb \qquad k(a-b) = ka - kb$$

Amb radicals fem exactament el mateix. Primer distribuïm i després simplifiquem les arrels:

$$(2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{6} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{18} - \sqrt{12} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

Dos parèntesis: quatre productes

Cada terme del primer parèntesi multiplica els dos termes del segon. Per tant, abans de reduir tenim quatre productes:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

En un quadrat, repetim el mateix parèntesi. Els dos productes creuats se sumen:

$$(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

> **Compte:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. No podem oblidar el terme $2ab$.

Per què funciona el conjugat?

El conjugat conserva els termes i canvia el signe que els separa. En multiplicar, els productes creuats són oposats i es cancel·len:

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = 2$$

Per això $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Aquesta igualtat ens permet eliminar les arrels dels denominadors que veurem a continuació.

Practica la distributiva.

D1. Desenvolupa $(\sqrt{5}+2)\sqrt{5}$.

D2. Desenvolupa $(\sqrt{3}+2)^2$. Escriu els quatre productes abans d'agrupar.

Racionalització i arrels imbricades

7. Racionalitzar el denominador

Racionalitzar vol dir escriure una fracció equivalent sense arrels al denominador. Multiplica numerador i denominador pel mateix factor no nul.

Un sol radical: multipliquem per aquest radical.

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

Una suma o una resta: multipliquem pel conjugat, que canvia el signe entre els dos termes.

$$\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 2\sqrt{3}+2$$

Si el numerador també conté radicals, desenvolupa'l:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 3+2\sqrt{2}$$

8. Arrels imbricades

Comença per l'arrel interior. Simplifica-la i després extreu els quadrats perfectes de l'arrel exterior.

$$\sqrt{6\sqrt{16}} = \sqrt{6\cdot 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Si queda una arrel interior no exacta, no la converteixis en una suma ni la substitueixis per un decimal:

$$\sqrt{2\sqrt{12}} = \sqrt{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{3}$$

> L'expressió $2\sqrt{\sqrt{3}}$ també és exacta. En escriure una arrel d'arrel com una sola arrel, multipliquem els índexs.

Practica.

A6. Racionalitza $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$.

A7. Simplifica $\sqrt{5\sqrt{16}}$.

A8. Simplifica $\sqrt{2\sqrt{20}}$.

Solucions de les activitats

Consulta aquesta pàgina després d'haver fet els càlculs. Si t'has equivocat, identifica el primer pas incorrecte i refés l'activitat.

A1. Descomposició en factors

$$\sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$$

A2. Extracció amb lletres positives

$$\sqrt{27a^5b^3} = \sqrt{9a^4b^2 \cdot 3ab} = 3a^2b\sqrt{3ab}$$

A3. Agrupació de radicals semblants

$$\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

A4. Propietat distributiva

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{3} = \sqrt{18} - \sqrt{6} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

A5. Quocient amb lletres

$$\frac{\sqrt{98x^3y}}{7\sqrt{2xy}} = \frac{1}{7}\sqrt{49x^2} = x$$

A6. Ús del conjugat

$$\frac{5}{\sqrt{6}-1} = \frac{5(\sqrt{6}+1)}{6-1} = \sqrt{6}+1$$

A7. Arrel interior exacta

$$\sqrt{5\sqrt{16}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

A8. Arrel interior no exacta

$$\sqrt{2\sqrt{20}} = \sqrt{4\sqrt{5}} = 2\sqrt{\sqrt{5}} = 2\sqrt[4]{5}$$

D1 i D2. Distributiva

$$\text{D1: } 5 + 2\sqrt{5} \qquad \text{D2: } 3 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3}$$

> **Abans del simulacre:** comprova que saps extreure factors, conservar els signes, distribuir, simplificar quocients, trobar el conjugat i començar una arrel imbricada per l'interior.